

25. Oblicz $a^4 + b^4$, wiedząc, że $a^2 + b^2 = 9$ oraz $a + b = 1$.

26. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność.

a) $(x + y)^2 \geq 4xy$

c) $x^2 + 4xy \geq y(6x - y)$

b) $(x - 2y)^2 + 8xy \geq 0$

d) $4x(x - 2y) \geq y(4x - 9y)$

27. Udowodnij, że nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x .

a) $(2x + 1)^2 \geq 8x$

b) $x(x + 12) \geq 9(2x - 1)$

c) $\frac{4}{x^2 + 1} \geq 3 - x^2$

28. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność.

a) $a^2 + b^2 \geq 2(a - b - 1)$

b) $a^2 + b^2 \geq 4(a + b - 2)$

c) $a^2 + ab + b^2 \geq 0$

29. Udowodnij, że dla dodatnich liczb a i b prawdziwa jest nierówność:

$$\frac{2}{a+b} \geq \frac{a+b}{a^2+b^2}$$

30. Udowodnij, że jeżeli dla dodatnich liczb a i b prawdziwa jest równość:

$$\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} = \frac{2}{a+b}$$

to $a = b$.

31. Sprawdź, czy dla każdej liczby naturalnej n liczba:

a) $48n^2 + 6n + 1\,053\,054$ jest podzielna przez 3,

b) $48n^3 + 68n + 20\,122\,012$ jest podzielna przez 4,

c) $(2n + 1)^2 - (2n - 1)^2 + 42$ jest podzielna przez 4,

d) $5^{n+2} + 5^n$ jest podzielna przez 13,

e) $4^{n+3} - 4^{n+1}$ jest podzielna przez 30.

32. Udowodnij, że:

a) suma dwóch kolejnych potęg liczby 2 o wykładnikach całkowitych dodatnich jest podzielna przez 6,

b) suma trzech kolejnych potęg liczby 2 o wykładnikach całkowitych dodatnich jest podzielna przez 14.

33. Udowodnij, że liczba:

a) $5^{20} + 5^{21} + 5^{22}$ jest podzielna przez 31,

b) $9^{99} - 5 \cdot 9^{98} - 24 \cdot 9^{97}$ jest podzielna przez 36.

34. a) U

b) U

niep

c) U

jest

35. a) U

prze

b) U

to ic

36. a) U

kow

b) W

na a

37. Udow

niej

38. Udow

więk

39. Na

oraz

towa

40. Pew

w s

w wy

odse

41. a) O

roku

cent

b) O

roku

to op